

基于ADMM的低副瓣阵列区域聚焦照射

杨仲平, 杨书宁, 周青松, 张剑云
(国防科技大学电子对抗学院, 安徽合肥 230031)

摘要: 区域聚焦照射(regional focusing irradiation)能将信号能量准确投送至指定区域,但阵列的超稀疏性使得副瓣区域能量较高,在实施精确电子战时极大增加了干扰系统遭受打击的风险,因此副瓣区域能量抑制问题必须加以解决.本文提出一种基于 L_∞ 范数评估栅瓣区域能量的方法,将其作为正则项引入区域聚焦照射模型以抑制副瓣区域最大能量,并建立了多目标优化模型.采用交替方向乘子(alternating direction method of multipliers)框架将原问题分解为两个子问题:对于恒模约束下二次规划子问题I,采用贪婪算法给出其闭式解;对于无约束 L_2 - L_∞ 范数的子问题II,将 L_∞ 范数做近似光滑化处理,并通过梯度下降法求解.交替求解两个子问题至收敛,以求解发射信号.仿真实验表明,本文模型在副瓣区域能量抑制上较基于 L_1 范数的区域聚焦照射模型具有更优性能,且本文算法实用性更强.

关键词: 区域聚焦照射; 精确电子战; 超稀疏阵列; 副瓣区域; 栅瓣区域; 交替方向乘子法

中图分类号: TN972 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2021)07-1370-09

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.12263/DZXB.20201280

Regional Focusing Irradiation of Low Sidelobe Array Based on ADMM

YANG Zhong-ping, YANG Shu-ning, ZHOU Qing-song, ZHANG Jian-yun

(College of Electronic Engineering, National University of Defense Technology, Hefei, Anhui 230031, China)

Abstract: Regional focusing irradiation (RFI) can precisely bring the energy of the transmitted signals to the specific regions. However, the array ultra-sparsity results in high energy level in the sidelobe regions, which increases the risk of the jamming system being attacked in precision electronic warfare. Therefore, it is significant to alleviate the energy level in the sidelobe regions. We propose a method based on L_∞ -norm to evaluate the energy level in the grating lobe regions, and introduce it to the RFI model to establish a multiobjective optimization model to alleviate the maximum energy in the sidelobe regions. The ADMM (Alternating Direction Method of Multipliers) framework is adopted to separate the origin problem into two subproblems. For subproblem-I, we adopt the greedy method to derive the closed-form solutions of the unimodular quadratic program. Regarding subproblem-II, which has L_2 - L_∞ terms without constraints, we smoothen the L_∞ term approximately, and employ the gradient descent method to solve it. The transmitted signal is obtained when the solutions of two subproblems are convergent. Numerical experiments reveal that the proposed model has better performance on alleviating the energy in sidelobe regions, and the adopted algorithm is more practical than the method based on L_1 -norm.

Key words: regional focusing irradiation (RFI); precision electronic warfare; ultra-sparsity array; sidelobe region; grating lobe region; alternating direction method of multipliers (ADMM)

1 引言

目前的电子干扰通过密集布阵仅能够在目标点附近形成扇形区域,附近的友邻设备极有可能遭受电磁误伤,干扰效果不精确,作战效果不理想.为解决这一问题,美国国防部高级研究计划局提出了精确电子战的概念^[1],其基本思想是通过超稀疏阵列在特定区域进行信号能量的相干合成或能量相消,以达到仅对指定

目标进行干扰,并不影响友邻设备正常工作的“外科手术”干扰^[2].

发射波束形成技术通过主瓣及零陷控制能够在一定程度上达到相似功能,但由于设计准则为天线方向图,其作用维度仅是目标相对阵列的角度^[3-8].文献[9, 10]提出了将声波能量聚焦在指定区域的思想,这种方法能够将声波能量聚焦于癌细胞所在区域,而非

癌细胞所在方向. 文献[11]以声波能量集中于肿瘤区域和健康区域波峰功率水平最小化作为优化准则来设计波形. 这种方法的作用维度为空间坐标, 较发射波束形成技术具有更优良的空域精准性.

受此方法启发, 精确电子战的研究成果中提出了区域聚焦照射 (Regional Focusing Irradiation, RFI) 技术^[12, 13]. 文献[13]根据指定目标及友邻设备的先验位置信息建立了 RFI 模型, 并通过松弛转化为半定规划问题来求解发射信号. 但阵列的超稀疏性产生了严重的栅瓣区域, 极大暴露干扰意图, 增加了干扰系统遭受反辐射武器攻击的风险. 在方向图综合的栅瓣或副瓣抑制研究中, 文献[14]通过修正最小二乘估计的虚拟阵元回波算法有效抑制了栅瓣. 文献[15]以副瓣电平最大值作为栅瓣评价指标, 采用差分进化算法对副瓣进行了有效抑制. 文献[16]在 Hilbert 空间中构造了 L_2 范数综合天线方向图的方法, 在波束赋形和副瓣抑制上取得了较好效果. 但文献[14~16]所用模型的作用维度仍是角度, 并不适于 RFI 技术. 在精确电子战的副瓣区域能量抑制研究中, 文献[17]将各副瓣区域信号的 L_1 范数作为正则项引入 RFI 模型, 在副瓣区域的能量抑制上取得了一定效果. 但在某些情景下, L_1 范数正则项仅能使副瓣区域总能量得到抑制, 栅瓣区域仍具有较大能量.

针对上述问题, 本文提出一种基于 L_∞ 范数评估栅瓣区域能量的方法, 并将 L_∞ 范数作为正则项以抑制副瓣区域最大能量. 采用交替方向乘法 (Alternating Direction Method of Multipliers, ADMM) 将原问题分解为交替迭代的两个子问题: 对于子问题 I, 根据贪婪算法推导了其闭式解. 对于子问题 II, 我们对目标函数进行光滑化处理, 采用梯度下降法求解. 本文通过仿真实验比较了不同模型产生的能量分布图, 以及正则化参数对模型的影响, 从而说明其有效性. 此外, 算法分析表明本文算法相对现有算法具有占优的计算效率, 并能避免求解子问题 I 时出现的不收敛的情形.

2 低副瓣阵列区域聚焦照射评价准则

图 1 所示为精确电子战示意图, 干扰目标与若干友邻设备均位于 XOY 平面, 其坐标由先验信息已知, 分别为 r_T 与 r_{P_i} , $i = 1, 2, \dots, p$, 其中 $r_T, r_{P_i} \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$, p 为友邻设备个数. 考虑到设备尺寸以及不可避免的探测误差, 我们将干扰区域及保护区域分别扩展为半径为 r_T 与 r_p 的圆形区域 Ω_T 与 Ω_{P_i} . 含有 M 个阵元的超稀疏阵列位置分别为 $r_i \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$, $i = 1, 2, \dots, M$, 其阵元间距远大于发射信号半波长^[12, 17]. 各阵元采用波形分集技术^[11], 所发射信号为 $x_m(t)$, 其中 $m = 1, 2, \dots, M$, 则在采样时刻 t_n , 发射信号可用如下向量形式表示:

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_M]^T \quad (1)$$

其中 $x_m \in \mathbb{C}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{M \times 1}$, $(\cdot)^T$ 表示转置运算. 在分布式阵列的研究中, 信号传播模型通常不考虑多径传播及阴影衰落的影响^[12, 13, 17~19], 因此各阵元发射信号至某一点 σ 的广义导向矢量 $\mathbf{a}(\sigma)$ 可表示为:

$$\mathbf{a}(\sigma) = \left[\frac{e^{j2\pi f_0 \tau_1(\sigma)}}{\|r_1 - \sigma\|_2}, \frac{e^{j2\pi f_0 \tau_2(\sigma)}}{\|r_2 - \sigma\|_2}, \dots, \frac{e^{j2\pi f_0 \tau_M(\sigma)}}{\|r_M - \sigma\|_2} \right]^T \quad (2)$$

其中 $\sigma \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$, $\mathbf{a}(\sigma) \in \mathbb{C}^{M \times 1}$, f_0 为发射信号的载波频率, c 表示电磁波传播速度, $\tau_m(\sigma) = \|r_m - \sigma\|_2 / c$ 为第 m 个阵元的发射信号从 r_m 处至 σ 处的传播延时, $1/\|r_m - \sigma\|_2$ 为信号在空间的传播衰减. 则阵列在点 σ 处的合成信号 $S(\sigma)$ 可以表示为:

$$S(\sigma) = \mathbf{a}(\sigma)^H \mathbf{x} \quad (3)$$

其中 $S(\sigma) \in \mathbb{C}$, $(\cdot)^H$ 表示共轭转置. 则点 σ 处的合成功率率为:

$$P(\sigma) = |S(\sigma)|^2 = \mathbf{x}^H \mathbf{a}(\sigma) \mathbf{a}(\sigma)^H \mathbf{x} \quad (4)$$

对某一区域 Ω_α 内所有点的合成功率进行积分, 可得 Ω_α 内的总能量 E_{Ω_α} 为:

$$E_{\Omega_\alpha} = \int_{\Omega_\alpha} P(\sigma) d\sigma \quad (5)$$

为求得式(5)的解析形式, 将区域 Ω_α 分为 N 个离散化网格 σ_n , 其中 $n = 1, 2, \dots, N$. 若每个离散网格的面积为 ΔS , 则当 $N \rightarrow \infty$ 时, 式(5)可近似表示为^[17]:

$$\begin{aligned} E_{\Omega_\alpha} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \mathbf{x}^H \mathbf{a}(\xi_n) \mathbf{a}(\xi_n)^H \mathbf{x} \Delta S \\ &= \mathbf{x}^H \left(\sum_{n=1}^N \Delta S \mathbf{A}(\xi_n) \right) \mathbf{x} \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $\mathbf{A}(\xi_n) = \mathbf{a}(\xi_n) \mathbf{a}(\xi_n)^H$ 是 Hermitian 矩阵, 为表达简洁我们以 $\mathbf{Q}_\alpha = \sum_{n=1}^N \Delta S \mathbf{A}(\xi_n)$ 表示区域 Ω_α 的功率乘子. 因此, 目标区域 Ω_T 的总能量和保护区域 Ω_P 的总能量可写为如下形式:

$$\begin{cases} E_{\Omega_T} = \mathbf{x}^H \mathbf{Q}_T \mathbf{x} \\ E_{\Omega_P} = \sum_{i=1}^p \mathbf{x}^H \mathbf{Q}_{P_i} \mathbf{x} \end{cases} \quad (7)$$

为达到干扰目标区域并不影响保护区域的目标, 我们采用二者区域能量差值 O_{RFI} 来评价 RFI 效果:

$$\begin{aligned} O_{\text{RFI}} &= E_{\Omega_T} - E_{\Omega_P} \\ &= \mathbf{x}^H \mathbf{Q}_T \mathbf{x} - \sum_{i=1}^p \mathbf{x}^H \mathbf{Q}_{P_i} \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^H \mathbf{Q} \mathbf{x} \end{aligned} \quad (8)$$

若整个关注区域为 Ω , 则副瓣区域 Ω_c 可以表示为

Ω_r 与 Ω_p 以外的其他区域. 我们采用上述均匀离散的方法将副瓣区域 Ω_c 划分为 N_c 个网格点 $\zeta_g, g = 1, 2, \dots, N_c$. 对于 Ω_c 中的任一网格点 ζ_g , 可根据式(2)得到阵列至 ζ_g 处的广义导向矢量 $\mathbf{a}(\zeta_g)$, 将所有副瓣区域离散点的广义导向矢量按列组合为副瓣区域的导向矩阵可得:

$$\mathbf{G} = [\mathbf{a}(\zeta_1), \mathbf{a}(\zeta_2), \dots, \mathbf{a}(\zeta_{N_c})] \quad (9)$$

其中 $\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{M \times N_c}$. 考虑到 L_∞ 范数能够表达向量内所有元素的最大模值, 且具有优良的凸性, 因此 Ω_c 内栅瓣区域合成信号的最大模值可以用 O_{GL} 表示为:

$$O_{GL} = \|\mathbf{G}^H \mathbf{x}\|_\infty \quad (10)$$

由于信号模值与合成能量具有平方关系, 因此可以采用 O_{GL} 来等效评估 Ω_c 内栅瓣区域的最大能量. 与文献[17]提出的 L_1 范数相比, O_{GL} 能更好地评价精确电子战中副瓣区域的能量水平. 尽管 L_1 范数具有良好的稀疏性, 但发射信号 \mathbf{x} 由于维度受限, 无法使得规模极大的向量 $\mathbf{G}^H \mathbf{x}$ 足够稀疏. 此时将 L_1 范数作为正则项引入模型, 仅能惩罚并抑制副瓣区域总能量, 仍会存在个别合成信号模值较大的离散点, 对应的栅格区域能量依然较高. 因此, L_∞ 范数更能反映副瓣区域的能量水平, 也更适合作为RFI模型中的正则项.

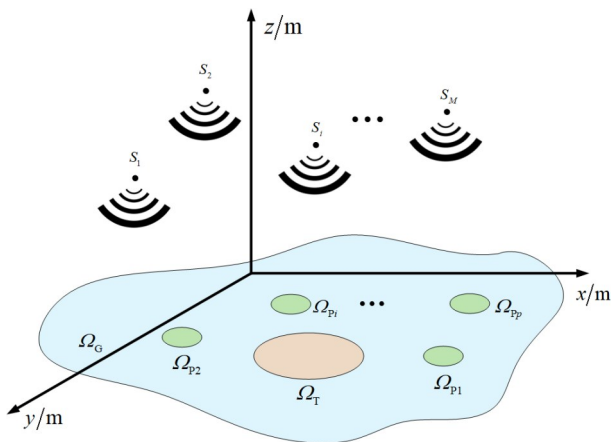


图1 精确电子战示意图

3 低副瓣阵列区域聚焦照射原理

3.1 基于ADMM的低副瓣阵列区域聚焦照射算法

精确电子战的目标是实现最大程度的区域聚焦照射并尽可能压低副瓣区域中的能量, 因此在优化问题中应最大化 O_{RFI} , 最小化 O_{GL} . 本文将 O_{GL} 作为正则项以惩罚栅瓣区域能量, 进而从整体上抑制副瓣区域能量. 关于低副瓣阵列区域聚焦照射的多目标优化问题表示为:

$$\max_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^H \mathbf{Q} \mathbf{x} - \gamma \|\mathbf{G}^H \mathbf{x}\|_\infty$$

$$\text{s.t. } |x_i|^2 = 1, i = 1, 2, \dots, M \quad (11)$$

其中, γ 为 O_{GL} 的正则化参数, 可以根据实际情况进行选择, 以在模型中达到不同的惩罚效果; 约束条件表示各独立阵元均采用最大且归一化的发射功率. 为了使优化问题(11)中的目标函数具有凸性且便于处理, 引入一个 Hermitian 半正定矩阵 $\mathbf{P} = \eta \mathbf{I}_M - \mathbf{Q}$, 其中 $\mathbf{I}_M \in \mathbb{R}^{M \times M}$ 为单位对角矩阵, η 为 \mathbf{Q} 矩阵的最大特征值. 因此优化问题(11)可以等价表示为:

$$\min_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^H \mathbf{P} \mathbf{x} + \gamma \|\mathbf{G}^H \mathbf{x}\|_\infty$$

$$\text{s.t. } |x_i|^2 = 1, i = 1, 2, \dots, M \quad (12)$$

虽然优化问题(12)中的目标函数关于 \mathbf{x} 具有凸性, 但由于约束条件的复杂性及非凸性难以直接求解. 因此, 我们采用ADMM框架将原优化问题(12)分解为交替迭代的两个子问题. 由于ADMM仅适用于实值问题, 引入如下参数:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_r = [\text{Re}\{\mathbf{x}\}^T, \text{Im}\{\mathbf{x}\}^T]^T \\ \mathbf{G}_r = \begin{bmatrix} \text{Re}\{\mathbf{G}\} & -\text{Im}\{\mathbf{G}\} \\ \text{Im}\{\mathbf{G}\} & \text{Re}\{\mathbf{G}\} \end{bmatrix} \\ \mathbf{U}_r = \begin{bmatrix} \text{Re}\{\mathbf{U}\} & -\text{Im}\{\mathbf{U}\} \\ \text{Im}\{\mathbf{U}\} & \text{Re}\{\mathbf{U}\} \end{bmatrix} \\ \mathbf{P}_r = \mathbf{U}_r^T \mathbf{U}_r \end{cases} \quad (13)$$

其中, $\text{Re}\{\cdot\}$ 和 $\text{Im}\{\cdot\}$ 分别表示提取实部和虚部的算子; \mathbf{U} 矩阵由 \mathbf{P} 矩阵进行Cholesky分解而得到, 且满足 $\mathbf{P} = \mathbf{U}^T \mathbf{U}$ 的关系. 因此优化问题(12)可转化为等价实值问题:

$$\min_{\mathbf{x}_r} \mathbf{x}_r^T \mathbf{P}_r \mathbf{x}_r + \gamma \|\mathbf{G}_r^T \mathbf{x}_r\|_\infty$$

$$\text{s.t. } (\mathbf{x}_r)_i^2 + (\mathbf{x}_r)_{i+M}^2 = 1, i = 1, 2, \dots, M \quad (14)$$

通过引入新变量及罚函数, 可以采用ADMM框架将优化问题(14)表达为交替迭代的两个子问题^[20]. 若当前迭代步为 t , 则两个子问题可表示如下:

子问题1

$$\min_{\mathbf{x}_r^{t+1}} (\mathbf{x}_r^{t+1})^T \mathbf{P}_r (\mathbf{x}_r^{t+1}) + \frac{\rho^t}{2} \|\mathbf{x}_r^{t+1} - \mathbf{z}_r^t + \boldsymbol{\lambda}^t\|_2^2$$

$$\text{s.t. } (\mathbf{x}_r^{t+1})_i^2 + (\mathbf{x}_r^{t+1})_{i+M}^2 = 1, i = 1, 2, \dots, M \quad (15)$$

子问题2

$$\min_{\mathbf{z}_r^{t+1}} \gamma \|\mathbf{G}_r^T \mathbf{z}_r^{t+1}\|_\infty + \frac{\rho^t}{2} \|\mathbf{x}_r^{t+1} - \mathbf{z}_r^{t+1} + \boldsymbol{\lambda}^t\|_2^2 \quad (16)$$

其中, $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{2M \times 1}$ 为引入的对偶向量, $\rho \in \mathbb{R}$ 是 \mathbf{x}_r^{t+1} 与 \mathbf{z}_r^{t+1} 之间欧式距离的罚因子. ρ^{t+1} 与 $\boldsymbol{\lambda}^{t+1}$ 的迭代更新表达式分别为:

$$\lambda^{t+1} = \lambda^t + \mathbf{x}_r^{t+1} - \mathbf{z}_r^{t+1} \quad (17)$$

$$\rho^{t+1} = \rho^t \cdot \begin{cases} 1, & \|\mathbf{x}_r^{t+1} - \mathbf{z}_r^{t+1}\|_2 \leq 0.98 \|\mathbf{x}_r^t - \mathbf{z}_r^t\|_2 \\ 1.01, & \text{else} \end{cases} \quad (18)$$

交替求解子问题 1 与子问题 2, 直至 \mathbf{x}_r^{t+1} 与 \mathbf{z}_r^{t+1} 收敛, 可以得到优化问题(12)的解. 基于 ADMM 的低副瓣阵列区域聚焦照射算法框架如图 2 所示:

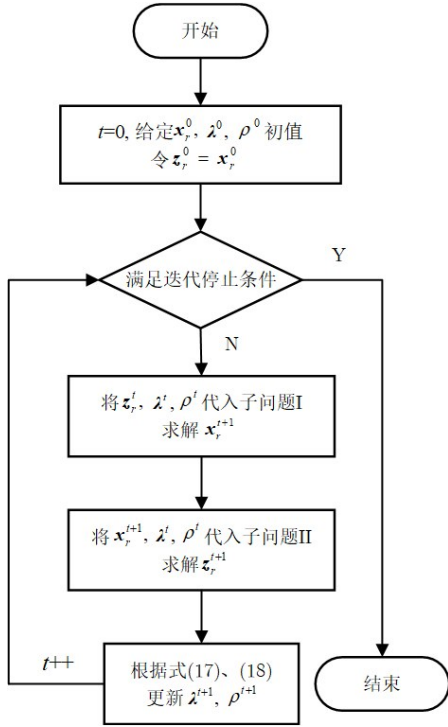


图 2 基于 ADMM 的低副瓣阵列区域聚焦照射算法框架

3.2 基于贪婪的求解子问题 I 算法

由于子问题 I 中的约束条件使得问题求解极为复杂, 所以我们在 ADMM 框架中第 t 次迭代时, 将子问题 I 重新转化为如下优化问题以便于求解:

$$\min_{\mathbf{x}_r^{t+1}} (\mathbf{x}_r^{t+1})^H \mathbf{P} (\mathbf{x}_r^{t+1}) + \frac{\rho^t}{2} \|\mathbf{x}_r^{t+1} - \mathbf{z}^t + \hat{\lambda}^t\|_2^2$$

$$\text{s.t. } |x_i|^2 = 1, i = 1, 2, \dots, M \quad (19)$$

优化问题(19)中 \mathbf{z}^t 和 $\hat{\lambda}^t$ 分别是 \mathbf{z}_r^t 和 λ^t 的复数形式, 为当前迭代的已知量, 并满足 $\mathbf{z}^t = \mathbf{T}\mathbf{z}_r^t, \lambda^t = \mathbf{T}\hat{\lambda}^t$ 关系式, 其中 $\mathbf{T} = [\mathbf{I}_M, \mathbf{j}\mathbf{I}_M]$. 文献[17]对优化问题(19)采用极大-极小(Majorization-Minimization, MM)算法进行求解, 该算法在求解时通过迭代并引入一系列新的目标函数进行放缩. 但该优化问题的约束条件限定了其解空间为多个希尔伯特球面的交集, 通过放缩并迭代求解时可能会陷入某一不收敛的恶劣区间, 使得算法无法求解. 根据求解恒模约束下优化问题的贪婪算法^[21, 22], 我们给出优化问题(19)的闭式解. 将优化问题(19)中的

约束条件代入目标函数可得:

$$F(\mathbf{x}^{t+1}) = (\mathbf{x}^{t+1})^H \mathbf{P} (\mathbf{x}^{t+1}) + \frac{\rho^t}{2} \|\mathbf{x}^{t+1} - \mathbf{z}^t + \hat{\lambda}^t\|_2^2$$

$$= (\mathbf{x}^{t+1})^H \mathbf{P} (\mathbf{x}^{t+1}) + \frac{\rho^t}{2} M - 2\text{Re} \left\{ \frac{\rho^t}{2} (\mathbf{z}^t - \hat{\lambda}^t)^H \mathbf{x}^{t+1} \right\}$$

$$+ \frac{\rho^t}{2} (\mathbf{z}^t - \hat{\lambda}^t)^H (\mathbf{z}^t - \hat{\lambda}^t)$$

$$= (\mathbf{x}^{t+1})^H \mathbf{P} (\mathbf{x}^{t+1}) - 2\text{Re} \left\{ \frac{\rho^t}{2} (\mathbf{z}^t - \hat{\lambda}^t)^H \mathbf{x}^{t+1} \right\}$$

$$+ H_1(\mathbf{z}^t, \hat{\lambda}^t) \quad (20)$$

其中, $H_1(\mathbf{z}^t, \hat{\lambda}^t)$ 是常数项. 因此, 优化问题(19)可等价于:

$$\min_{\mathbf{x}^{t+1}} (\mathbf{x}^{t+1})^H \mathbf{P} (\mathbf{x}^{t+1}) - 2\text{Re} \left\{ \frac{\rho^t}{2} (\mathbf{z}^t - \hat{\lambda}^t)^H \mathbf{x}^{t+1} \right\}$$

$$\text{s.t. } |x_i|^2 = 1, i = 1, 2, \dots, M \quad (21)$$

令 $\mathbf{x}_k^{t+1}, \mathbf{z}_k^t, \hat{\lambda}_k^t$ 分别表示仅保留 $\mathbf{x}^{t+1}, \mathbf{z}^t, \hat{\lambda}^t$ 中前 k 个元素的向量, \mathbf{P}_k 表示 \mathbf{P} 矩阵中保留前 k 行和前 k 列的子矩阵, 则 \mathbf{x}^{t+1} 中第 $k+1$ 个元素的解 $\mathbf{x}^{t+1}(k+1)$ 可以表示为^[22]:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{x}} = \left[(\mathbf{x}_k^{t+1})^T, x \right]^T \\ F_2(x) = \tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{P}_{k+1} \tilde{\mathbf{x}} - 2\text{Re} \left\{ \frac{\rho^t}{2} (\mathbf{z}_{k+1}^t - \hat{\lambda}_{k+1}^t)^H \tilde{\mathbf{x}} \right\} \\ \mathbf{x}^{t+1}(k+1) = \arg \min_{|x|^2=1} \{ F_2(x) \} \end{cases} \quad (22)$$

其中, $(\cdot)^*$ 表示复数共轭. 因此式(22)中目标函数的标量形式为:

$$\begin{cases} H_2 = \sum_{i=1}^k x(i) p_{i(k+1)} - \frac{\rho^t}{2} [\mathbf{z}^t(k+1) - \hat{\lambda}^t(k+1)] \\ F_2(x) = \tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{P}_{k+1} \tilde{\mathbf{x}} - 2\text{Re} \left\{ \frac{\rho^t}{2} (\mathbf{z}_{k+1}^t - \hat{\lambda}_{k+1}^t)^H \tilde{\mathbf{x}} \right\} \\ = 2\text{Re} \{ H_2 x \} + G_0 \end{cases} \quad (23)$$

其中, G_0 是常数项, $\mathbf{z}^t(i), \hat{\lambda}^t(i)$ 和 $x(i)$ 分别表示向量 $\mathbf{z}^t, \hat{\lambda}^t$ 和 \mathbf{x}_k^{t+1} 中的第 i 个元素, p_{ij} 表示矩阵 \mathbf{P}_{k+1} 中第 i 行第 j 列的元素. 由线性空间关系可知, $\mathbf{x}^{t+1}(k+1)$ 具有如式(24)的闭式表达:

$$\begin{cases} \phi = \pi - \arg \{ H_2 \} \\ \mathbf{x}^{t+1}(k+1) = \arg \min_{|x|^2=1} \{ \text{Re} \{ H_2 x \} \} = e^{j\phi} \end{cases} \quad (24)$$

其中, $\arg(\cdot)$ 算子表示复数相位. 由于优化问题(21)中的解具有 $\mathbf{x}^{t+1} = [e^{j\phi_1}, e^{j\phi_2}, \dots, e^{j\phi_M}]^T$ 的形式, 令 $\mathbf{x}^{t+1}(1) = e^{j0} = 1$, 并将 $k = 1, 2, \dots, M-1$ 依次代入式(24), 可得优化问题(21)的解 \mathbf{x}^{t+1} .

3.3 基于梯度下降的子问题 II 算法

在 ADMM 进行第 t 次迭代时,根据算法 1 可以求解 \mathbf{x}^{t+1} ,下面根据优化问题(16)对 \mathbf{z}^{t+1} 进行求解.子问题 II 是一个无约束的混合范数凸问题,采用 YALMIP 工具包可直接求解^[23],但使用工具包求解将产生大量的计算冗余,导致算法整体效率下降.为此,我们基于梯度下降给出求解子问题 II 的高效算法.

算法 1 基于贪婪的求解子问题 I 算法

1. $\mathbf{x}^{t+1}(1) = 1, k=1$;
2. 更新 $\mathbf{x}_k^{t+1}, \mathbf{z}_k^t, \hat{\lambda}_k^t$ 向量以及 P_k 矩阵;
3. 根据式(24)计算 $\mathbf{x}^{t+1}(k+1)$;
4. $k \leftarrow k+1$;
5. 如果 $k > M$,则跳出循环并输出 \mathbf{x}^{t+1} ,否则跳转至步骤 2.

由于优化问题(16)中 L_∞ 范数的存在使得目标函数非光滑且不可导,因此在采用梯度下降法之前需要对 L_∞ 范数近似光滑化处理^[24]:

$$\|u\|_\infty \rightarrow \mu \ln \left[\sum_{i=1}^n e^{\frac{u_i}{\mu}} + e^{-\frac{u_i}{\mu}} \right] \quad (25)$$

其中, $u \in \mathbb{R}^n$, μ 为光滑化因子,满足 $\mu \rightarrow 0$. 根据式(25),子问题 II 可近似改写为:

$$\min_{\mathbf{z}_r^{t+1}} \gamma \mu \ln \left[\sum_{i=1}^{2N_c} e^{\frac{(\mathbf{G}_r^T \mathbf{z}_r^{t+1})_i}{\mu}} + e^{-\frac{(\mathbf{G}_r^T \mathbf{z}_r^{t+1})_i}{\mu}} \right] + \frac{\rho^t}{2} \|\mathbf{x}_r^{t+1} - \mathbf{z}_r^{t+1} + \boldsymbol{\lambda}^t\|_2^2 \quad (26)$$

其中, $\mathbf{x}_r^{t+1}, \boldsymbol{\lambda}^t, \mathbf{G}_r$ 为已知矩阵. 设目标函数为 $J(\mathbf{z}_r^{t+1})$, 则在第 p 步迭代时,目标函数对 $(\mathbf{z}_r^{t+1})^p$ 的梯度为^[25]:

$$\begin{cases} H_3 = \sum_{i=1}^{2N_c} \left(\frac{1}{\mu} e^{\frac{(\mathbf{G}_r^T (\mathbf{z}_r^{t+1})^p)_i}{\mu}} - \frac{1}{\mu} e^{-\frac{(\mathbf{G}_r^T (\mathbf{z}_r^{t+1})^p)_i}{\mu}} \right) \mathbf{G}_{r_i}^T \\ H_4 = \sum_{i=1}^{2N_c} e^{\frac{(\mathbf{G}_r^T (\mathbf{z}_r^{t+1})^p)_i}{\mu}} + e^{-\frac{(\mathbf{G}_r^T (\mathbf{z}_r^{t+1})^p)_i}{\mu}} \\ \nabla J((\mathbf{z}_r^{t+1})^p) = -\frac{\gamma \mu H_3}{H_4} - \rho^t [(\mathbf{z}_r^{t+1})^p - (\mathbf{x}_r^{t+1} - \boldsymbol{\lambda}^t)] \end{cases} \quad (27)$$

其中, $(\mathbf{G}_r^T (\mathbf{z}_r^{t+1})^p)_i$ 表示 $\mathbf{G}_r^T (\mathbf{z}_r^{t+1})^p \in \mathbb{R}^{2N_c \times 1}$ 向量中的第 i 个元素, $\mathbf{G}_{r_i}^T \in \mathbb{R}^{2M \times 1}$ 表示 $\mathbf{G}_r^T \in \mathbb{R}^{2M \times 2N_c}$ 矩阵中的第 i 列向量,因此 $(\mathbf{z}_r^{t+1})^{p+1}$ 的表达式为:

$$(\mathbf{z}_r^{t+1})^{p+1} = (\mathbf{z}_r^{t+1})^p - \beta \nabla J((\mathbf{z}_r^{t+1})^p) \quad (28)$$

算法 2 基于梯度下降的求解混合范数子问题 II 算法

1. $(\mathbf{z}_r^{t+1})^0 = \mathbf{x}_r^{t+1}, p=0$;
2. 更新 $\mathbf{G}_r^T (\mathbf{z}_r^{t+1})^p$ 向量;
3. 根据式(27)、式(28)计算 $(\mathbf{z}_r^{t+1})^{p+1}$;
4. $p \leftarrow p+1$;
5. 如果满足迭代停止条件,则终止并输出 $(\mathbf{z}_r^{t+1})^{p+1}$;否则跳转至步骤 2.

根据子问题 I 和 II 的算法交替求解至 ADMM 框架收敛,即可得到实现低副瓣阵列区域聚焦照射的发射信号.

4 仿真实验及分析

为验证算法有效性,我们设置如下情景进行仿真实验:目标点位于坐标原点(0m, 0m, 0m),友邻设备的中心坐标分别为(20m, 25m, 0m)、(-20m, 10m, 0m)、(-15m, -25m, 0m)、(10m, -20m, 0m);目标区域半径为 $r_T = 5\text{m}$,保护区半径为 $r_p = 2\text{m}$,目标区域 Ω_T 与保护区 Ω_p 位于 XOY 平面内,其余区域为副瓣区域 Ω_C , XOY 平面内关注范围为 $(-50\text{m}, 50\text{m}) \times (-50\text{m}, 50\text{m})$,离散网格分辨率为 $0.25\text{m} \times 0.25\text{m}$;为方便对比,我们将发射信号载频设为与文献[13, 17]相同的参数 $f_0 = 1\text{GHz}$. 算法参数方面,惩罚因子初值为 $\rho^0 = 1$,拉格朗日向量初值 $\boldsymbol{\lambda}^0 = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{M \times 1}$ ^[20],无穷范数近似光滑化因子 $\mu = 10^{-5}$ ^[24],子问题 II 中梯度下降法学习因子 $\beta = 0.5$ ^[25].

4.1 算法效果对比

实验设置的超稀疏阵列由 $M = 10$ 个阵元组成,并随机分布于距 XOY 平面 $d = 1000\text{m}$ 的同一平面内. 为说明算法有效性,我们将本文算法与文献[17]提出的两种 RFI 模型进行对比:一种是不考虑副瓣区域的 RFI 模型,目标函数中仅存在区域聚焦二次项(Quadratic Term, QT),我们将其称之为 QT 模型. 另一种是在模型中加入 L_1 范数正则项,目标函数存在二次项以及 L_1 范数项的 RFI 模型,我们称之为 QT- L_1 模型;同理,本文提出模型称为 QT- L_∞ 模型. 我们在 QT- L_∞ 模型中分别设置 $\gamma_1 = 10, \gamma_2 = 30, \gamma_3 = 50$ 与文献[17]的两种模型进行对比,并分析 QT- L_∞ 模型中不同正则化因子的影响.

根据各自模型的算法及式(6),可计算出每个离散网格内的能量. 由 $1/d^2$ 进行归一化并采用对数 dB 制表示,可得 XOY 平面关注范围内的能量分布图. 如图 3~图 7 所示,目标区域 Ω_T 由黑色圆线表示,保护区 Ω_p 由白色圆线表示,图中红色部分表示相应区域能量较高,蓝色区域表示相应区域能量较低. QT 模型虽然能够达到区域聚焦照射的目标,但副瓣区域能量较高. QT- L_1 模型能在一定程度上压低副瓣区域能量,但由于模型中的 L_1 范数项仅能对副瓣区域的总能量进行抑制,最终仍在栅瓣区域形成了较大的能量. 而 QT- L_∞ 模型能够较好地克服 QT- L_1 模型中的缺点,有效压低了副瓣区域的总能量,并且较好地限制了栅瓣区域的最大能量,在三个模型中副瓣能量最低. 而且图 5 和图 6 中 QT- L_∞ 模型的 RFI 效果均较 QT- L_1 模型好,说明 QT- L_∞ 模型在合适的正则化因子下,各项性能均优于 QT- L_1 模型,在这三种模型中综合效果最佳. 此外,从图 5~图 7 的对比中可以发现:当正则化因子过大时,QT- L_∞ 模型

虽然得到了更好的副瓣区域能量抑制效果,但也牺牲了一定的区域聚焦性能. 本质原因在于多目标优化模型中不同的正则化因子会赋予各目标不同的权重,导致在求解模型时各目标的结果产生差异.

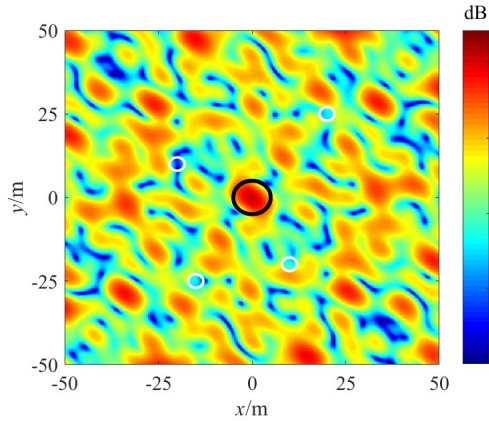


图3 QT模型下能量分布图

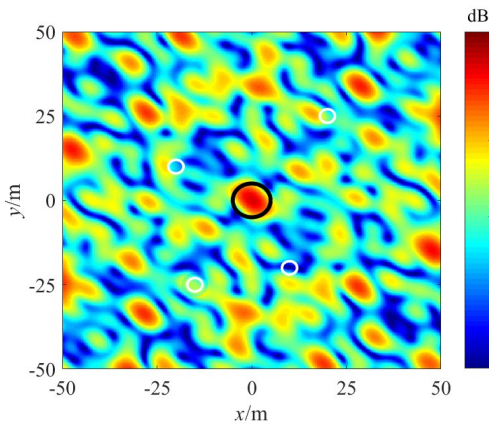


图4 QT-L₁模型下能量分布图

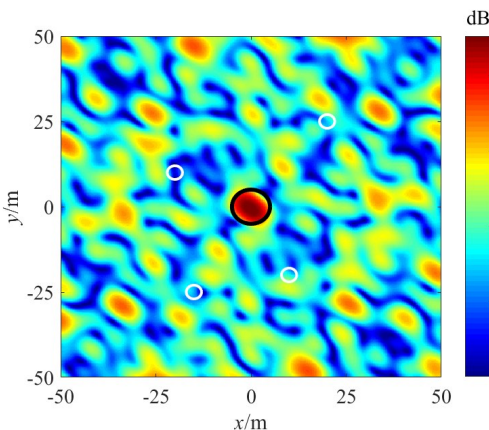


图5 QT-L_∞模型下 $\gamma = 10$ 时能量分布图

4.2 模型性能分析

为进一步分析各模型性能,我们将三种模型对算法运行 50 次,并对结果的平均性能进行分析. 表 1 列出了三种模型的性能指标: Ω_T 内最小能量值 E_T , Ω_P 内

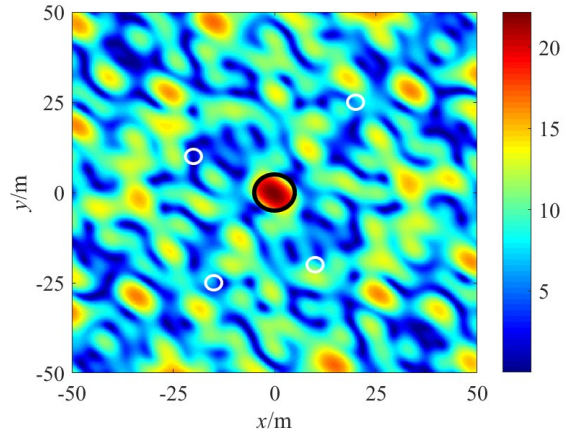


图6 QT-L_∞模型下 $\gamma = 30$ 时能量分布图

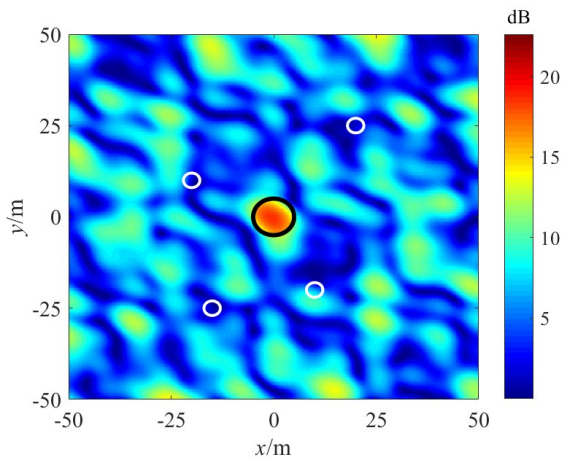


图7 QT-L_∞模型下 $\gamma = 50$ 时能量分布图

最大能量值 E_P , Ω_C 内对应栅瓣区域的最大能量值 E_C , Ω_T 内平均能量 Ave_T , Ω_P 内平均能量 Ave_P , Ω_C 内平均能量 Ave_C , 有效干扰率 ω_T , 误干扰率 ω_P , 副瓣区域风险率 ω_C . 其中 ω_T , ω_P 以及 ω_C 的定义如式(29)所示:

$$\left\{ \begin{aligned} \omega_T &= \frac{\sum_{i=1}^{N_T} I(E_{T_i} - c_T)}{N_T} \\ \omega_P &= \frac{\sum_{i=1}^{N_P} I(E_{P_i} - c_P)}{N_P} \\ \omega_C &= \frac{\sum_{i=1}^{N_C} I(E_{C_i} - c_C)}{N_C} \end{aligned} \right. \quad (29)$$

其中 $I(\cdot)$ 表示单位阶跃函数, 干扰阈值 $c_T = 15\text{dB}$, 误干扰阈值 $c_P = 8\text{dB}$, 副瓣区域阈值 $c_C = 12\text{dB}$.

由表 1 结果可见, QT-L_∞ 模型与 QT-L₁ 模型在综合性性能上均优于 QT 模型, 并且当 $\gamma = 10$ 或 30 时, QT-L_∞ 模型的副瓣区域性能明显优于 QT-L₁ 模型. 说明在合适的正

则化因子下,QT- L_∞ 模型的各项指标上均较QT- L_1 模型有提升.然而,当 $\gamma_3 = 50$ 时,QT- L_∞ 模型较QT- L_1 模型的优势体现在副瓣区域的能量抑制上,并且与 $\gamma_1 = 10$ 及 $\gamma_2 = 30$ 的QT- L_∞ 模型存在一些性能差异.造成这些差异的原因主要是过大的正则化因子使得QT- L_∞ 模型更

多关注副瓣区域抑制项,从而导致区域聚焦照射项产生了一定的恶化.这说明采用此模型实施精确电子战时,需要综合考量以选择合适的正则化因子,不能过分关注副瓣区域抑制效果,从防止对精确干扰效果产生较大影响.

表1 RFI模型性能指标分析

性能指标	E_T (dB)	E_p (dB)	E_C (dB)	Ave_T (dB)	Ave_p (dB)	Ave_C (dB)	ω_T (%)	ω_p (%)	ω_C (%)
QT	10.07	10.46	19.41	16.23	5.70	12.11	72.94	39.42	57.15
QT- L_1	9.46	9.04	19.24	17.43	5.35	9.18	84.10	29.81	25.34
QT- L_∞ ($\gamma_1 = 10$)	10.89	6.88	13.96	18.94	4.32	6.87	92.25	11.33	9.76
QT- L_∞ ($\gamma_2 = 30$)	10.66	6.93	13.53	18.55	4.38	6.24	90.74	11.36	7.28
QT- L_∞ ($\gamma_3 = 50$)	9.23	6.15	10.72	15.79	3.27	4.51	69.17	6.72	3.20

4.3 算法分析

本文与文献[17]的算法均采用了ADMM框架,具有较高的计算效率.但本文算法与之相比具有两方面的优势:一是本文算法在求解子问题I时能够避免因不收敛而无法求解的情形,算法可用性更强;二是本文算法的计算效率更高,在相同计算复杂度下CPU运行时间更低.为验证本文算法的优势,进行图8(a)~8(c)的仿真实验.

如图8(a)所示,我们在各超稀疏阵列规模下设置50组阵列进行蒙特卡洛实验,得到了不同规模下子问题的平均迭代次数以及算法的平均运行时间.“Sub1 in M1”蓝色曲线表示QT- L_1 模型中采用了MM算法求解子问题I的迭代次数,实验中我们剔除了一些因不收敛无法求解的情形.“Sub1 in M2”橙色曲线表示QUAD- L_∞ 模型中求解子问题I所需迭代次数,该算法迭代次数与超稀疏阵列规模成正比,与“Sub1 in M1”算法的计算复杂度均为 $O(M)$.“Sub2 in M1”黄色曲线采用了近端梯度算法对无约束 L_1 - L_2 混合范数进行求解,而“Sub2 in M2”紫色曲线采用了梯度下降算法对 L_∞ - L_2 混合范数进行求解,两种算法的计算复杂度均为 $O(M)$.可见本

文与文献[17]算法均具有同样高效的 $O(2M)$ 计算复杂度.

在图8(b)中,我们对各超稀疏阵列规模 M 进行100次蒙特卡洛实验来分析MM算法求解子问题I的成功率.当超稀疏阵列规模较大时,采用MM算法求得子问题I的成功率极低,特别是 $M \geq 90$ 时,该算法几乎无法求解子问题I,需要多次运行算法.造成这一问题的主要原因是子问题I的解空间为多个希尔伯特球面交集,在 M 较大时其解空间极为复杂,进行迭代放缩时算法容易陷入不收敛的恶劣区间,导致无法得到子问题I的解,这也进一步说明了本文算法在求解子问题I上的优势.

如图8(c)所示,我们在各阵列规模下设置50组阵列进行蒙特卡洛实验,分析两种算法的CPU平均运行时间.虽然两种算法的计算复杂度相同,但从CPU运行时间上来看,本文算法效率略优于文献[17]中算法.当MM算法成功求解子问题I时,本文算法的优势体现在子问题II的求解上.由于文献[17]采用近端梯度法求解 L_1 范数项时存在对 M 阶矩阵求逆的过程,极大消耗了计算资源,并拖累CPU运行时间.当 M 较大时,这种影响将进一步放大.

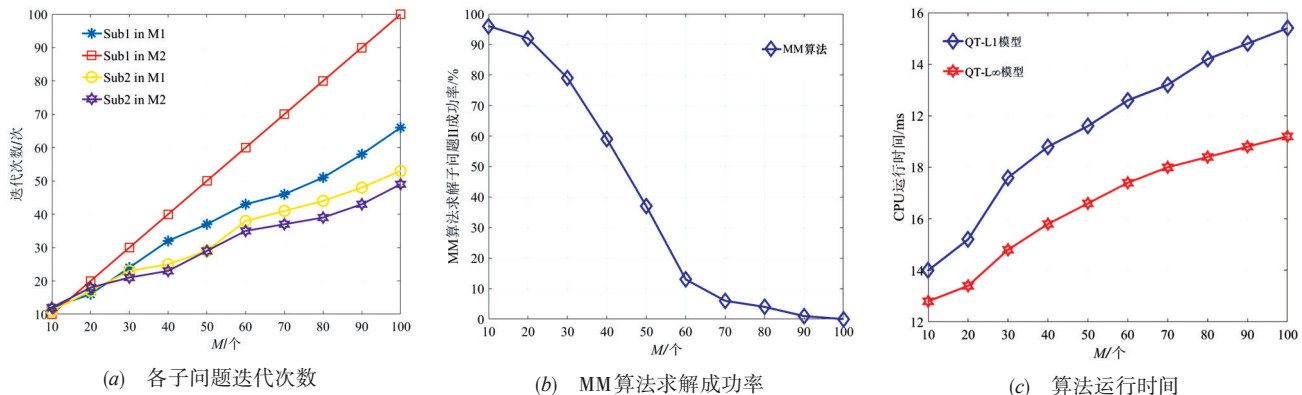


图8 算法分析

5 结束语

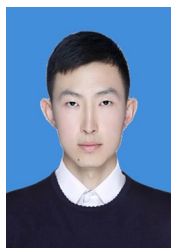
本文研究了低副瓣阵列区域聚焦照射的发射信号设计问题. 通过在 RFI 模型中引入 L_{∞} 范数正则项, 有效克服了 L_1 范数正则项导致的副瓣区域总能量得到抑制, 但某些栅瓣区域能量较大的缺陷. 我们基于 ADMM 框架将目标函数分为交替迭代的两个子问题: 通过贪婪算法给出子问题 I 的闭式解, 避免了 MM 算法在某些情况下不收敛的情形, 并通过梯度下降法进一步提高了求解子问题 II 的计算效率. 仿真结果表明, 本文模型相较于现有方法效果更优, 且算法实用性更强. 值得注意的是, 选用本文模型实施精确电子战时, 需要根据实际情况选取合适的正则化参数. 另外, 我们在信号传播模型上进行了一定假设和简化, 我们在下一步的工作中将据此完善.

参考文献

- [1] Strategic Technology Office (STO). Precision Electronic Warfare (PREW), DARPA-BAA 09-65 [R]. Arlington: Strategic Technology Office (STO) of the US Defense Advanced Research Projects Agency, 2009.
- [2] 蒋盘林. 精准电子战技术发展初探[J]. 通信对抗, 2010, 112(4): 3 – 6.
JIANG Pan-lin. Study of development of precision EW technologies[J]. Communication Countermeasures, 2010, 112(4): 3 – 6. (in Chinese)
- [3] 胡振涛, 金勇, 武国栋, 等. 无线携能保密网络下的中继协作波束成形算法[J]. 电子学报, 2020, 48(1): 124 – 130.
HU Zhen-tao, JIN Yong, WU Guo-dong, et al. Cooperative beamforming algorithm of relay in SWPIT secrecy networks[J]. Acta Electronica Sinica, 2020, 48(1): 124 – 130. (in Chinese)
- [4] 董明科, 李应博, 王达, 等. 基于干扰和功率控制的多小区分布式波束成形[J]. 电子学报, 2015, 43(3): 597 – 600.
DONG Ming-ke, LI Ying-bo, WANG Da, et al. Distributive beamforming design in multicell downlinks using interference and power control[J]. Acta Electronica Sinica, 2015, 43(3): 597 – 600. (in Chinese)
- [5] Xiao Z Y, Zhu L P, Xia X G, UAV communications with millimeter-wave beamforming: potentials, scenarios, and challenges [J]. China Communications, 2020, 17(9): 147 – 166.
- [6] Asplund H, Astely D, Butovitsch P V, et al. Advanced Antenna Systems for 5G Network Deployments[M]. New York: Academic Press, 2020.
- [7] Hu C, Liu J, Liao X, et al. A novel equivalent baseband channel of hybrid beamforming in massive multiuser MIMO systems[J]. IEEE Communications Letters, 2018, 22(4): 764 – 767.
- [8] Nair S S, Bhashyam S. Hybrid beamforming in MU-MIMO using partial interfering beam feedback[J]. IEEE Communications Letters, 2020, 24(7): 1548 – 1552.
- [9] Fenn A J, Sathiseelan V, King G A. Improved localization of energy deposition in adaptive phased-array hyperthermia treatment of cancer[J]. Lincoln Laboratory, 1996, 9(2): 187 – 195.
- [10] Ho C, Ju K, Cheng T. Thermal therapy for breast tumors by using a cylindrical ultrasound phased array with multifocus pattern scanning: a preliminary numerical study [J]. Physics in Medicine and Biology, 2007, 52(15): 4585 – 4599.
- [11] Li J. MIMO Radar Signal Processing [M]. New Jersey: John Wiley & Sons, 2009. 41 – 47.
- [12] 宋聃, 王伟, 熊子源, 等. 超稀疏阵列下基于波形分集的区域能量聚焦技术研究[J]. 电子与信息学报, 2014, 36(5): 1082 – 1087.
SONG Dan, WANG Wei, XIONG Zi-yuan, et al. Waveform diversity based regional energy focusing under ultra-sparse array [J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2014, 36(5): 1082 – 1287. (in Chinese)
- [13] Song D, Wang W, Xu Z, et al. Focused energy delivery with protection for precision electronic warfare[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2017, 52(6): 3053 – 3064.
- [14] 汪月清, 刘姜玲, 王小漠, 等. 基于修正最小二乘的虚拟端射阵列回波算法研究[J]. 电子学报, 2015, 43(10): 2124 – 2128.
WANG Yue-qing, LIU Jiang-lin, WANG Xiao-mo, et al. Research on echo algorithm of virtual end-fire antenna array based on modified least squares[J]. Acta Electronica Sinica, 2015, 43(10): 2124 – 2128. (in Chinese)
- [15] 房书韬, 李伟明, 薛正辉, 等. 基于改进差分进化算法的机载分布式阵列栅瓣抑制方法[J]. 微波学报, 2020, 36(5): 7 – 11, 17.
FANG Shu-tao, LI Wei-ming, XUE Zheng-hui, et al. Grating lobe suppression of airborne distributed array based on improved differential evolution algorithm [J]. Journal of Microwaves, 2020, 36(5): 7 – 11, 17. (in Chinese)
- [16] Robert J M. Phased Array Antenna Handbook[M]. Boston: Artech House, 2005. 141 – 153.
- [17] Chen S, Xu C, Zhang J. Efficient focused energy deliv-

- ery with grating lobe mitigation for precision electronic warfare [J/OL]. Signal Processing, 2020, 169. <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2019.107409>.
- [18] Jayaprakasam S, Rahim S K A, Leow C Y. Distributed and collaborative beamforming in wireless sensor networks: classifications, trends, and research directions[J]. IEEE Communications Surveys & Tutorials, 2017, 19(4): 2092 – 2116.
- [19] Mudumbai R, Hespanha J, Madhow U, et al. Distributed transmit beamforming using feedback control[J] IEEE Transactions on Information Theory, 2010, 56(1): 411 – 426.
- [20] Boyd S, Parikh N, Chu E, et al. Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers [J]. Foundations & Trends in Machine Learning, 2010, 3(1): 1 – 122.
- [21] Ragi S, Chong E K P, Mittelmann H D. Heuristic methods for designing unimodular code sequences with performance guarantees [A]. 2017 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing [C]. New Orleans, LA, USA: IEEE Press, 2017. 3221 – 3225.
- [22] Ragi S, Chong E K P, Mittelmann H D. Polynomial-time methods to solve unimodular quadratic programs with performance guarantees[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2017, 55(5): 2118 – 2127.
- [23] LÖFBERG J. YALMIP : a toolbox for modeling and optimization in MATLAB [J]. Skeletal Radiology, 2011, 41(3): 287 – 292.
- [24] 崔赞. 基于无穷范数非光滑优化的光滑化方法[D]. 大连: 大连理工大学, 2016.
- CUI Zan. Smoothing Method for Optimization Problem Based on L_∞ Minimization [D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2016. (in Chinese)
- [25] Boyd S, and Vandenberghe L. Convex Optimization[M]. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 2004.

作者简介



杨仲平 男, 1996年3月出生于辽宁开原. 现为国防科技大学电子对抗学院硕士研究生. 主要研究方向为阵列信号处理、凸优化理论.
E-mail: yangzhongping14@nudt.edu.cn



杨书宁 男, 1996年11月出生于重庆万州. 现为国防科技大学电子对抗学院硕士研究生. 主要研究方向为阵列信号处理、稀疏理论.
E-mail: yangshuning14@nudt.edu.cn



周青松 男, 1982年12月出生于安徽巢湖. 博士. 现为国防科技大学电子对抗学院副教授, 研究生导师. 主要研究方向为凸优化理论、稀疏理论.
E-mail: zhouqingsong1207@gmail.com



张剑云(通信作者) 男, 1963年9月出生于浙江龙泉. 博士. 现为国防科技大学电子对抗学院教授, 博士生导师. 主要研究方向为雷达及目标环境模拟、雷达信号处理.
E-mail: zjy921@sina.com